

POSSIBILITES ET LIMITES ACTUELLES DE LA THEORIE DES ECOULEMENTS HYPERSONIQUES

Par J.-P. GUIRAUD

O.N.E.R.A.

Châtillon-sous-Bagneux-France

Sommaire—Les principales acquisitions théoriques récentes relatives aux écoulements hypersoniques sont passées en revue. Les effets de gaz réels ont une incidence notable sur les écoulements hypersoniques, aussi sont-ils brièvement analysés, avec mention spéciale pour les effets liés à la cinétique chimique. Toutefois, la majeure partie de cet article est consacrée aux écoulements de fluide parfait. Dans ce domaine, l'approximation newtonienne a permis d'obtenir récemment des résultats intéressants sur la structure tridimensionnelle des écoulements hypersoniques; ce chapitre de la théorie est analysé dans quelque détail et des résultats significatifs sont donnés, relatifs notamment à des cônes de révolution sous incidence. Le problème du choc détaché, qui a donné lieu à une abondante littérature, est examiné, aussi bien du point de vue des solutions purement numériques, que du point de vue des solutions explicites approchées, faisant usage des approximations hypersoniques usuelles. Finalement, quelques considérations sont données au sujet de l'écoulement sur un obstacle mince, lorsque l'on tient compte des effets d'émoussement. Les principaux points brièvement résumés dans cet article seront développés dans une publication ultérieure (77).

I—EFFETS DE GAZ REELS

EN raison de l'intervention de températures très élevées, l'étude des écoulements hypersoniques ne peut s'entreprendre en ignorant les effets de gaz réels. Ce sont, d'une part, les propriétés de transport: viscosité, conductibilité thermique, diffusion, lesquelles contrôlent l'échauffement cinétique des véhicules hypersoniques par l'intermédiaire de la couche limite; ce sont, d'autre part, les propriétés thermodynamiques des gaz aux températures très élevées; ce sont enfin les effets de relaxation: relaxation des degrés de liberté internes, relaxation des variations de composition chimique par dissociation.

Les propriétés thermodynamiques des gaz aux températures élevées ont fait l'objet d'études extensives et peuvent être considérées comme désormais bien connues; soit que l'on se réfère aux nombreuses tables existantes⁽¹⁰⁾ pour les calculs précis; soit que l'on fasse usage de formules

explicités^(27, 33) plus ou moins précises, mais d'un maniement moins lourd que les tables—surtout pour les calculs qui s'effectuent sur des machines électroniques; soit enfin que l'on utilise des diagrammes de Mollier. L'incidence de ces propriétés thermodynamiques sur les problèmes d'écoulement a été discutée en détail par A. Ferri⁽²⁰⁾ lors de la précédente réunion à Madrid en 1958, et il n'en sera pas davantage question ici⁽³⁹⁾.

Les propriétés de transport, par contre, sont mal connues, d'une part parce que les déterminations expérimentales sont nécessairement indirectes et incertaines, d'autre part parce que les estimations théorétiques que l'on peut faire sont largement entachées d'incertitude^(33, 61). La théorie formelle de ces phénomènes de transport a pourtant été poussée fort loin dans le cadre de la théorie cinétique des gaz, à la suite des travaux déjà anciens de Chapmann-Enskog. Un exposé systématique en est donné dans le livre de Hirschfelder, Curtiss et Bird⁽⁴¹⁾, mais l'application de cette théorie formelle à des cas particuliers ne peut se faire que si l'on connaît les lois de force régissant la dynamique des collisions moléculaires, et l'état actuel de nos connaissances relatives à ces lois de forces est encore part trop insuffisant. Toutefois, la spectroscopie est un outil très puissant dans ce domaine, et l'on peut espérer dans un avenir sans doute encore éloigné, pouvoir faire usage des développements très fins de la théorie cinétique des gaz pour déterminer avec précision les propriétés de transport des gaz à température élevée. Quoiqu'il en soit de cette possibilité, il est raisonnable de compter à l'heure actuelle avec une incertitude de l'ordre de 50%⁽⁶¹⁾ sur la valeur du coefficient de viscosité. D'ailleurs, même dans le cas le plus simple du transfert de chaleur laminaire au point d'arrêt^(18, 45), les résultats théorétiques sont eux-mêmes incertains, compte non tenu de l'incertitude sur les valeurs de la viscosité; à plus forte raison en est-il de même, des prévisions nécessairement très grossières que l'on peut effectuer dans des régions où le gradient de pression est important, éventuellement mal connu. Dans ces conditions, on peut raisonnablement estimer que, si l'on exclut quelques études très fines telles que celles de Fay et Riddell⁽¹⁸⁾—études qui ne peuvent pourtant être qualifiées d'exactes—, la prévision théoretique du flux de chaleur à la paroi d'un véhicule hypersonique n'est pas essentiellement limitée par l'incertitude fondamentale relative aux coefficients de transport.

Avant de quitter cette question de l'échauffement cinétique, il est utile de signaler l'intervention du rayonnement des gaz chauds. Pour les véhicules hypersoniques les plus rapides, l'échauffement cinétique par convection dans la couche-limite peut être inférieur à l'énergie rayonnée par les gaz de la couche de choc. On peut alors se demander si les effets de rayonnement ne peuvent pas modifier, par couplage entre mouvement et rayonnement, le transfert de chaleur par conduction dans la couche-limite et

mettre en défaut la règle d'additivité des flux de chaleur qui est généralement utilisée dans ce genre de question. Des indications à ce sujet sont fournies par l'étude de l'écoulement plan de Couette⁽³²⁾, laquelle se laisse mener à bien en utilisant la méthode de Crocco. L'on met ainsi en évidence que le paramètre d'interaction est $F = \frac{\sigma \varepsilon_g T^4 d^2}{\mu V^2}$ où σ est la constante de Stefan, ε_g le pouvoir émissif d'une lame de gaz d'épaisseur unité, T la température, d la distance des plaques, V leur vitesse relative et μ le coefficient de viscosité. Si $F \ll 1$ le couplage est négligeable. Des indications sont données par la figure 1 d'où il résulte que le couplage peut généralement être tenu pour négligeable.

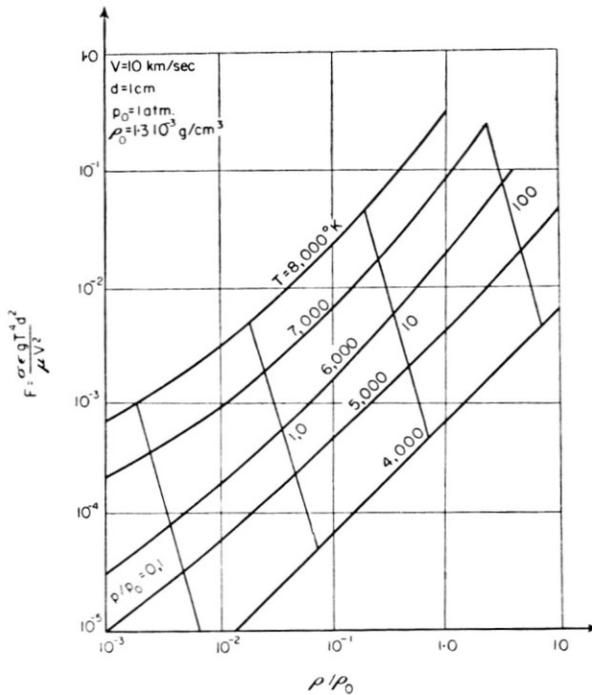


FIG. 1. Ecoulement plan de Couette couplage mouvement-rayonnement.

S'il apparaît donc que les propriétés thermodynamiques sont bien connues, que les propriétés de transport, bien que fondamentalement mal connues, le sont d'une manière satisfaisante pour l'ingénieur, il reste que le problème le plus mal connu est celui des effets de retard à l'équilibre, ou effets de relaxation. L'incidence de ces effets sur les écoulements de gaz a été décrite depuis longtemps⁽⁵¹⁾ au moins dans des cas simples.

Les notions générales dont relève l'étude des écoulements avec intervention de cinétique chimique ont été dégagées par Chu⁽¹²⁾ mais il n'est

pas possible d'aller bien loin dans cette voie. Pour simplifier l'étude mathématique, divers auteurs^(58, 71) ont développé une théorie linéarisée en étudiant le problème de la paroi ondulée ou du profil mince placé dans un écoulement amont en équilibre. Les études de ce genre éclairent, certes, certains aspects de la question, mais elles sont de peu d'utilité pour les ingénieurs car le problème est fondamentalement non linéaire, et les progrès que l'on peut attendre de la théorie ne sont pas d'ordre mathématique. Avec tous les inconvénients que comportent les méthodes numériques, il est nécessaire de disposer d'une masse importante de résultats numériques de manière à se faire une philosophie générale. Un nombre déjà important de résultats de cette nature a été publié^(4, 16, 22, 38, 49, 72). La plupart d'entre eux sont relatifs à l'écoulement derrière une onde de choc normale^(16, 22); d'autres sont relatifs à des écoulements monodimensionnels dans les tuyères^(4, 38); d'autres enfin sont relatifs à l'écoulement sur un obstacle à nez arrondi dans la région subsonique^(22, 49). Naturellement, une première estimation est obtenue en effectuant systématiquement tous les calculs, soit en considérant que le gaz est en équilibre chimique, soit en considérant que sa composition chimique est invariable ou, selon l'expression consacrée dans ce genre de question: gelée. Les deux résultats obtenus encadrent le résultat réel et les deux bornes ainsi obtenues, lorsqu'elles ne sont pas trop éloignées, donnent des renseignements qui peuvent être jugés suffisants. Si l'on désire améliorer la description, il est nécessaire de tenir compte des équations traduisant la cinétique des réactions chimiques; mais, en raison de l'incertitude qui est encore attachée aux valeurs numériques des coefficients, il n'y a pas lieu d'affiner la description à l'extrême. Pour l'aérodynamicien, les conclusions que l'on peut déduire du schéma de gaz dissocié idéal de Lighthill⁽⁵⁰⁾ paraissent être largement suffisantes pour l'instant. Les propriétés du gaz de Lighthill ont été étudiées à l'équilibre par Lighthill⁽⁵⁰⁾ lui-même, et hors d'équilibre par Freemann⁽²²⁾. A la suite de ces deux auteurs, ce schéma commode a été utilisé avantageusement dans plusieurs études^(2, 4, 22, 49).

II—APPROXIMATION NEWTONIENNE

Lorsque la couche de choc, comprise entre l'onde de choc et l'obstacle, est très mince, on peut faire usage d'une méthode d'investigation connue sous le nom d'approximation newtonienne. Avant de discuter les principes généraux de sa mise en oeuvre, il en faut discuter les conditions générales de validité. Un bilan de masse montre que la question est contrôlée par le rapport des densités $\varepsilon = \rho_\infty/\rho$ à la traversée de l'onde de choc normale, rapport qui doit être petit pour que l'approximation newtonienne puisse valablement être utilisée. Or les relations de l'onde de

choc normale montrent que $\varepsilon = \frac{\chi-1}{\chi+1} \left(1 + 0 \left(\frac{1}{M^2} \right) \right)$, où $\chi = \frac{h}{e}$ est le rapport de l'enthalpie spécifique à l'énergie interne spécifique évalué derrière l'onde de choc, et M le nombre de Mach de l'écoulement amont. Pour un gaz parfait, à chaleurs spécifiques constantes $\chi = \gamma = \frac{C_p}{C_v}$. Ainsi, pour l'air, la valeur de ε est-elle 1/6 si l'on ne tient pas compte des effets de gaz réel. Ceux-ci ont pour résultat de diminuer ε en diminuant χ . Si l'on désigne par n le nombre de degrés de liberté complètement excités, l'on a $\chi = 1 + 2/n$, et par suite: $\varepsilon = 1/n + 1$.

Pour les gaz diatomiques aux températures modérées, il y a trois degrés de liberté de translation et deux de rotation, d'où la valeur 1/6 précédemment indiquée. Vers 3000°K le gaz n'est pas encore dissocié, mais les degrés de liberté de vibration sont complètement excités; pour l'air, on a alors $\varepsilon = 1/7$. Ce n'est pas une diminution substantielle. Par contre, lorsque les effets de dissociation interviennent, les chaleurs spécifiques augmentent considérablement, ce qui entraîne une diminution substantielle de χ , ε tombant à une valeur de l'ordre de 1/10 à 1/15. Naturellement, lorsque le gaz est complètement dissocié, ne comportant plus que des espèces atomiques, $n = 3$ et $\varepsilon = 1/4$. On voit donc que la situation la plus favorable, pour la validité de l'approximation newtonienne est celle de l'air partiellement dissocié. Même dans ce cas, il est encore difficile de tenir ε pour très petit et d'adopter en toute confiance les conclusions relatives au cas où ε est nul. D'où l'intérêt des études de seconde approximation qui, permettant d'obtenir une correction, améliorent les résultats de la première approximation ($\varepsilon = 0$) et surtout permettent de se faire une idée qualitative de la validité de cette première approximation. A cet égard, la situation peut être extrêmement favorable ou, au contraire, catastrophique selon le type d'écoulement.

Les écoulements hypersoniques tridimensionnels se laissent étudier fort simplement lorsque $\varepsilon = 0$. Une analyse globale⁽²⁸⁾ peut être menée à bien et donne toutes les caractéristiques de l'écoulement grâce à un procédé variationnel. Les lignes de courant sont des géodésiques de la surface de l'obstacle et la vitesse est constante le long de ces lignes. La formule de Newton-Busemann se généralise sous la forme $C_p = 2 \left\{ \sin \beta - K : I \right\}$ où $\tan \beta$ est la pente locale de l'obstacle, K son tenseur de courbure et I le tenseur d'impulsion global de la couche de choc, qui s'exprime par une intégrale curviligne. Bien que divers auteurs aient étudié à peu près simultanément et indépendamment les écoulements hypersoniques tridimensionnels par l'approximation newtonienne, la priorité semble revenir à Hayes⁽³⁶⁾ (Communication au 1^{er} congrès de l'I.C.A.S Madrid 1958), de

sorte que la formule précédente devrait être appelée formule de Newton-Busemann-Hayes.

Cette formule est suffisamment simple pour se laisser mener jusqu'aux applications numériques dans quelques cas. Nous citerons trois exemples typiques: force globale à l'intrados d'une aile mince⁽²⁸⁾, efforts globaux agissant sur des obstacles de révolution sous faible incidence^(28, 29), cônes circulaires sous incidence⁽⁴³⁾. Ce dernier cas est particulièrement simple et Laval⁽⁴³⁾ a pu exprimer la finesse d'un cône d'ouverture 2θ par la formule:

$$f = \left(\frac{C_z}{C_x} \right)_{max} = \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta \left\{ 3 \cos(2\theta) - \frac{1}{4} \right\}^{1/2}}$$

Après avoir mentionné quelques applications de la théorie, il est instructif d'en discuter les limitations. Cela peut se faire en étudiant systématiquement les anomalies auxquelles conduit la notion d'écoulement newtonien, anomalies qui peuvent soit déceler l'existence d'un comportement remarquable dans l'écoulement réel, soit mettre en évidence quelque défaillance du schéma.

Il est également possible — et cela est plus sûr — de chercher à construire une seconde approximation donnant une indication sur l'importance de l'erreur commise.

L'étude systématique des anomalies de l'écoulement newtonien a été poussée fort loin dans le livre de Hayes et Probstein⁽³⁷⁾, mais l'interprétation en est malaisée. Nous nous contenterons ici de mentionner le concept de couche libre de Lighthill-Hayes d'après lequel l'onde de choc décolle de l'obstacle à partir du point où la formule de Newton-Busemann prédit une pression nulle. Il est naturellement difficile d'interpréter ce schéma; peut-être le comportement asymptotique de l'onde de choc qu'elle prédit: $\pi^{v+2} = Cx$, où la constante C dépend de la forme du nez, a-t-il quelque rapport avec le comportement asymptotique de l'onde de choc loin du nez d'un obstacle à nez émoussé ($v = 0$ pour le cas plan).

Parmi les études de seconde approximation, celle de Freemann⁽²¹⁾ relative au coefficient de pression sur une sphère à $M = \infty$ est à mentionner. La situation est extrêmement défavorable pour l'efficacité de la formule de Busemann dans ce cas. Un travail intéressant de Freemann⁽²⁴⁾ également est relatif au mécanisme de décollement d'une couche libre. Il apparaît dans le développement au voisinage de ce point des termes en $\varepsilon^{1/11}$, et cela explique la faible efficacité de tous ces résultats. Une autre étude de seconde approximation a été faite par Cheng⁽⁷⁾ et l'auteur⁽²⁹⁾, s'agissant de cônes circulaires sous incidence. La situation est

ici très favorable: pour un cône de 30° de demi-ouverture à $M = \infty$, le gradient initial de force normale vaut 1,5 en première approximation, il vaut 1,523 en seconde approximation, alors que la valeur exacte est 1,521.

L'approximation newtonienne apparaît donc comme un outil puissant en raison de sa simplicité relative, mais l'efficacité en est très limitée. En règle générale, on peut estimer que cette efficacité est raisonnable lorsque les forces centrifuges ne sont pas très importantes, c'est-à-dire lorsque la courbure de l'obstacle est faible dans la direction générale de l'écoulement.

III—CALCUL DES CHOCS DETACHES

L'écoulement derrière l'onde de choc détachée, dans la région du nez d'un obstacle à nez émoussé, revêt une importance particulière en raison, d'une part, du fait que la répartition de pression sur l'obstacle commande le transfert de chaleur dans une région où il est important de la connaître, d'autre part, parce que la connaissance de l'écoulement jusqu'à la frontière transsonique est nécessaire pour pouvoir poursuivre par la méthode numérique des caractéristiques.

Le problème est extrêmement difficile en raison du caractère non linéaire, elliptique, des équations et de la présence de frontières mobiles. Il faut reconnaître que, du point de vue strictement mathématique, la question n'a guère progressé si l'on met à part les indications décisives qui ont été données par les publications de Garabedian et dont nous parlerons plus loin. Dans ces conditions, les principaux progrès réalisés l'ont été dans la recherche de solutions numériques. Le problème a été attaqué soit par des méthodes directes, soit par des méthodes inverses. Les méthodes inverses procèdent pas à pas à partir de l'onde de choc que l'on se donne a priori jusqu'à l'obstacle que l'on détermine. On ajuste l'onde de choc de départ de manière à obtenir un obstacle aussi voisin que possible de l'obstacle que l'on s'était donné a priori. Dans les méthodes directes, on se donne, au contraire, l'obstacle et la détermination de l'onde de choc s'opère simultanément avec la résolution du problème.

Les méthodes inverses ont été très développées, ceci en raison de la simplicité formelle du procédé. Pourtant elles se heurtent à une difficulté essentielle, provenant du fait que le problème de Cauchy est un problème mal posé pour les équations elliptiques. Il en résulte, du point de vue théorique, des difficultés, et du point de vue numérique, une instabilité qui se traduit par une croissance importante des erreurs à mesure que l'on procède à partir de l'onde de choc. D'un point de vue pratique, cela se traduit par le fait que des obstacles très différents peuvent être associés à des ondes de choc très voisines.

Il semble que l'instabilité purement numérique puisse être maîtrisée par diverses techniques et qu'elle ne soit pas un obstacle à la mise en oeuvre numérique des méthodes inverses qui ont été abondamment exploitées^(25, 26, 53, 54, 64, 66, 74). Il reste que l'aspect théorique de ces méthodes mérite d'être éclairci. A ce sujet, le travail de Garabedian⁽²⁵⁾ est fondamental.

Grâce à l'introduction des variables complexes, Garabedian parvient à ramener le problème elliptique initial à un problème hyperbolique, mais au prix de l'introduction d'une variable supplémentaire. Si l'onde de choc est analytique et si son prolongement analytique, dans une bande dont l'épaisseur est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche de choc, dépend continûment de paramètres, l'écoulement qui en résulte dépend aussi continûment de ces paramètres. Payne⁽⁵⁹⁾ ayant récemment démontré, au moins pour l'équation de Laplace, que la solution d'un problème inverse dépend nécessairement continûment des données de Cauchy pourvu que cette solution existe et soit bornée, il semble que la lumière est à peu près faite sur les méthodes inverses. En combinant les résultats de Garabedian et de Payne, l'on peut énoncer: toute solution d'un problème d'écoulement avec onde de choc détachée, physiquement acceptable, obtenue par la méthode inverse, est, nécessairement, stable. Cela ne veut d'ailleurs pas dire que le problème de Cauchy relativement à une équation elliptique est stable, cela veut dire que la technique de résolution d'un problème direct par la méthode inverse est stable, à supposer que la solution du problème direct existe. Nous renvoyons aux références citées^(26, 54, 64, 66, 74) pour la liste des solutions effectivement disponibles actuellement. En ce qui concerne les méthodes directes, elles sont naturellement plus difficiles à exploiter et les solutions publiées sont peu nombreuses. Plusieurs techniques ont été proposées dont la plus récente, et apparemment la plus avantageuse, est celle de Dorodnitsyn⁽¹⁵⁾ qui a été exploitée avec succès par Bielotserkowskii⁽¹⁾, par Holt et Gold⁽⁴²⁾, par Chubb⁽¹³⁾ et par Traugott⁽⁶³⁾.

Plusieurs méthodes conduisant à des solutions explicites approchées ont été proposées, spécialement adaptées au fait que l'écoulement général est hypersonique. La plus simple de ces méthodes est celle qui correspond au cas limite $\varepsilon = 0$ de l'approximation newtonienne. Nous avons vu que son efficacité était bien médiocre en ce qui concerne la prévision des pressions sur l'obstacle. La situation est plus favorable pour la distance de détachement qui, selon cette théorie, est donné par la formule:

$$\Delta = \varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \log \frac{R_1}{R_2}$$

pour un obstacle à rayons de courbure principaux inégaux R_1 et R_2 . Pour

la sphère de rayon R , la formule précédente donne $\Delta = \varepsilon R$, mais, par contre, pour le cylindre circulaire de rayon R placé normalement au vent, elle donne $\Delta = \infty$. La raison de cette anomalie provient du fait que, dans la région du point d'arrêt, l'approximation newtonienne fournit une très mauvaise représentation de la structure des lignes de courant. Celles-ci ne sont pas parallèles à l'obstacle comme le suppose la théorie et l'on peut se convaincre que l'erreur correspondante est plus faible que $O(\sqrt{\varepsilon})$ pour $s/R > O(\sqrt{\varepsilon})$ où s est la distance au point d'arrêt comptée le long de l'obstacle (ici sphérique) dont R est le rayon de courbure. L'erreur de la formule précédente sur Δ est donc $O(\sqrt{\varepsilon})$. Cela est confirmé dans le cas de la sphère par l'étude de Lighthill⁽⁵⁰⁾-Hayes⁽³⁷⁾-Whitham⁽⁶⁹⁾ basée sur la constance de la densité; la distance de détachement est obtenue par $\lim_{s \rightarrow 0} \{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \}$.

Le cas des obstacles à nez presque plat est plus difficile à mettre en oeuvre, car la méthode de séparation des variables, qui avait été utilisée avec succès dans le cas de la sphère et du cylindre, ne permet plus ici d'obtenir de solution adaptée au problème. On dispose pourtant de la double analogie hydraulique de Hayes⁽³⁷⁾-Legendre⁽⁴⁷⁾: analogie du puits artésien et analogie de la pomme d'arrosoir. La seconde peut être exploitée au laboratoire, mais il semble difficile d'en tirer autre chose que des indications qualitatives; du moins pourrait-elle permettre d'avoir des indications sur les effets d'incidence; Werle⁽⁷⁸⁾ a même eu l'idée ingénieuse de l'appliquer à une étude de l'ablation. Une méthode fort élégante a été développée par Hayes⁽³⁶⁻³⁷⁾. Un simple bilan de masse permet de montrer que, si les conditions suivantes sont vérifiées

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \left(\frac{R_c(o)}{R_0(o) + \Delta(o)} - 1 \right) \ll 1 \\ \frac{\Delta(o)}{R_c(o)} \ll 1 \end{array} \right.$$

$R_c(o)$ et $R_0(o)$ étant respectivement les rayons de courbure de l'onde de choc et de l'obstacle au point d'arrêt, et $\Delta(o)$ la distance de détachement; alors, u désignant la composante de la vitesse suivant la direction de l'obstacle, l'évolution de la caude de choc est réglée par l'équation.

$$\cot \beta + \frac{\varepsilon}{\cot \beta} - \cot \theta = \frac{v\Delta}{x} + \int_0^{\Delta} \frac{1}{\rho u} \frac{D(\rho u)}{Dx} dy \quad (1)$$

où β et θ sont les angles d'inclinaison de l'obstacle et de l'onde de choc sur la direction de l'écoulement incident, $\Delta(x)$ est l'épaisseur de la couche de choc, x la distance au point d'arrêt comptée le long de l'obstacle et $v = 0$ ou 1 selon que l'écoulement est plan ou de révolution. L'intégrale

est étendue à un segment de normale à l'obstacle compris entre l'obstacle et le choc. En négligeant cette intégrale, Hayes obtient la distance de détachement sur un disque circulaire de rayon R sous la forme $\Delta = 3^{3/4} \sqrt{\varepsilon} R$. Une formule bien plus efficace est celle de Serbin⁽⁶²⁾, de caractère théorico-empirique, qui donne

$$\Delta = \frac{1,03 \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}} R$$

Elle s'intègre dans le cadre tracé par la formule de Hayes (1) en admettant que le produit par x de l'intégrale est constant et que la valeur de cette constante est fixée par un bilan de masse sur la ligne sonique. En appliquant les techniques de l'approximation newtonienne Freemann⁽²³⁾ a retrouvé la formule (1) sans terme intégral, et l'on peut se convaincre que l'erreur attachée à cette formule est $O(\varepsilon^{1/4})$. Sans s'attacher à cet aspect décevant, l'on peut obtenir avec Freemann⁽²³⁾ le gradient initial de vitesse au point d'arrêt. Dans le cas du disque circulaire il vient ainsi

$$\left(\frac{d(u/U_\infty)}{d(x/R)} \right)_{x=0} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{3^{3/4}}$$

alors que Probstein a obtenu la valeur $\frac{4}{3\pi} \sqrt{(2-\varepsilon)\varepsilon}$ qui paraît être surestimée d'environ 25% d'après Boison et Curtiss⁽³⁾ ou Holt et Gold⁽⁴²⁾, comme il résulte d'une étude expérimentale⁽³⁾ et de calculs numériques par la méthode de Dorodnitsyn⁽⁴²⁾.

IV—ÉCOULEMENTS SUR DES OBSTACLES MINCES

L'un des premiers résultats obtenus dans l'étude théorique des écoulements hypersoniques fut la règle de similitude hypersonique, et l'analogie du piston de Hayes⁽³⁵⁾, cas particulier de la théorie hypersonique des petites perturbations⁽⁶⁵⁾. La règle de similitude indique que le nombre de Mach de l'écoulement incident et l'épaisseur relative de l'obstacle n'interviennent que par leur produit $M_\infty \tau$. Conformément à l'analogie du piston, une réduction intervient, un écoulement hypersonique stationnaire à deux (resp. trois) dimensions étant équivalent à un écoulement, non hypersonique, non stationnaire à une (resp. deux) dimension. Une réduction supplémentaire intervient dans le cas des ailes qui conduit à une théorie d'écoulement par tranches longitudinales, l'écoulement dans chaque plan normal à l'aile et parallèle à la direction du vent étant indépendant de l'écoulement dans les plans voisins.

Aux vitesses extrêmes, rencontrées lors de la rentrée d'un véhicule interplanétaire, les résultats précédents sont entièrement remis en ques-

tion par les effets d'émoussement. En raison de la présence du choc détaché à l'amont de l'obstacle, celui-ci est enveloppé par une couche à forte entropie et surtout à très faible masse spécifique qui modifie profondément la structure de l'écoulement, telle qu'elle est prévue par la théorie des petites perturbations. Naturellement, la couche-limite et le phénomène de forte interaction hypersonique entre onde de choc et couche-limite ont un rôle à jouer, mais ce rôle est sans doute secondaire par rapport au rôle joué par les effets d'émoussement et nous n'en parlerons pas. Nous voulons seulement discuter l'état théorique de la question en fluide non visqueux, état théorique qui est loin d'être définitif. Sans sortir du cadre de la théorie des petites perturbations, le problème a été généralement abordé à l'aide de la théorie de l'explosion^(8, 11, 46) laquelle paraît avoir convenablement permis d'interpréter les expériences effectuées en soufflerie jusqu'à des nombres de Mach de l'ordre de 10. Récemment, les expériences de Vas et Bogdonnof⁽⁶⁷⁾ semblent avoir montré l'insuffisance de la théorie de l'explosion dans le domaine de $M_\infty \cong 20$.

La théorie de l'explosion est basée sur l'élégante formule de Cheng⁽⁸⁾

$$F_N + 2\pi^2 \int_{y^2} pr^2 dr = 2\pi^2 \int_{\text{obst}}^{\text{choc}} \rho \left(e - e_\infty + \frac{v^2}{2} \right) r^2 dr \quad (2)$$

qui traduit le bilan de l'énergie, lorsqu'il est tenu compte de la condition géométrique de petites perturbations (faible inclinaison du vecteur vitesse) et de la conséquence qui en résulte en hypersonique (module de la vitesse constant au second ordre près par rapport à la pente des lignes de courant). Le terme F_N désigne la force de résistance du nez émoussé, le terme intégral du premier membre désigne la force de résistance sur la partie restante de l'obstacle, enfin le second membre désigne l'excès de l'énergie associée au mouvement transversal sur l'énergie correspondante dans la zone non perturbée, en amont de l'obstacle. L'importance des effets d'émoussements est caractérisée par l'importance relative des deux termes du premier membre. En particulier, lorsque F_N est très supérieur au terme intégral, (2) se réduit à

$$F_N = 2\pi^2 \int_{\text{obst}}^{\text{choc}} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) r^2 dr$$

l'effet d'émoussement est alors prépondérant et l'énergie totale du mouvement transversal, entre l'obstacle et le choc, est constante. Il est alors possible de faire usage des solutions homogènes de Sedov et Taylor pour le problème équivalent de la propagation d'une onde de choc engendrée

par une explosion intense. Dans le cas général, il faut se contenter d'une règle de similitude, obtenue par Cheng⁽⁸⁾ en substituant dans (2) les estimations qui résultent de la théorie des petites perturbations. La contribution originale de Chernii à ce problème est liée à l'introduction de l'approximation newtonienne ce qui permet en particulier d'obtenir des conclusions quantitatives dans le cas général où les trois termes de (2) sont du même ordre.

Sans faire appel à des résultats expérimentaux, il est possible de se convaincre que la théorie de l'explosion est insuffisante car elle ne tient pas compte de l'existence de la couche à forte entropie mentionnée plus haut. Ainsi n'est-il pas légitime de substituer dans l'intégrale du second membre de (2) les estimations qui résultent de la théorie des petites perturbations. Dans le but de tenter de prendre en compte l'effet de la couche à forte entropie, Gheng-Hall-Golian-Herzberg⁽⁹⁾ et l'auteur du présent article⁽³⁰⁻³¹⁾ ont développé une nouvelle théorie. Gheng et ses coauteurs ne poussent d'ailleurs pas jusqu'au bout les conséquences de leur schéma, de sorte que leurs conclusions ne sont pas absolument libérées de l'influence de la théorie de l'explosion. Telle apparaît en particulier l'utilisation de la formule (2) pour évaluer la constante de la relation pression-aire. La formule (2) est, certes, exacte, mais ses conséquences sont trop liées à la nature de l'hypothèse que l'on fait sur l'expression de l'énergie interne en fonction de la pression et de la masse spécifique. Là sans doute, et aussi dans l'utilisation de l'approximation newtonienne par Cheng, faut-il rechercher l'explication de la divergence entre ses conclusions et les nôtres, divergence qui se traduit par une évaluation différente de la constante α_v dans (3). Nous estimons que notre schéma est cohérent, mais il est largement qualitatif et, comme c'est un schéma asymptotique, les conclusions requises pour sa validité sont à peine satisfaites pour $M_\infty \cong 20$. Dans un ordre d'idées voisin, il faut citer les contributions de Lunev⁽⁵²⁾ et Sitchev⁽⁷⁶⁾ (voir aussi la communication de cet auteur dans le même volume).

Le schéma général de l'écoulement est indiqué sur la figure 2. Si l'on désigne par d l'épaisseur du nez, par ΔS le saut d'entropie en un point de l'onde de choc de cote $\tau = \zeta d$, la frontière de l'obstacle fictif vérifie la relation suivante:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{\gamma}} (R^{v+1} - r_0^{v+1}) &= (v+1) d^{v+1} \alpha_v (M_\infty, p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; F) \\ \alpha_v (M_\infty; p_\infty, T_\infty, \gamma_\infty, \bar{\gamma}; F) &= \int_0^{\xi} G\left(\frac{\Delta S}{R}\right) \zeta^v d\zeta \\ F: \text{forme du nez} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

La fonction G est définie par $G\left(\frac{\Delta s}{R}\right) = \frac{\rho_\infty}{\rho} \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}}$ où $\bar{\gamma}$ désigne un exposant adiabatique fictif. La borne supérieure ζ^* est caractérisée par le fait que pour $r = \zeta^*d$ la pente de l'onde de choc doit être $\ll 1$ et $\gg \frac{1}{M_\infty}$. La définition de a_v est asymptotique, en ce sens que, si M_∞ est très grand et si ζ_1^* et ζ_2^* sont deux valeurs de répondant à la question, l'on a :

$$\frac{\int_{\zeta_1^*}^{\zeta_2^*} G\left(\frac{\Delta s}{R}\right) \zeta^2 d\zeta}{\int_0^{\zeta_1^*} G\left(\frac{\Delta s}{R}\right) \zeta^2 d\zeta} \ll 1 \tag{4}$$

telle est d'ailleurs la condition de validité de la théorie.

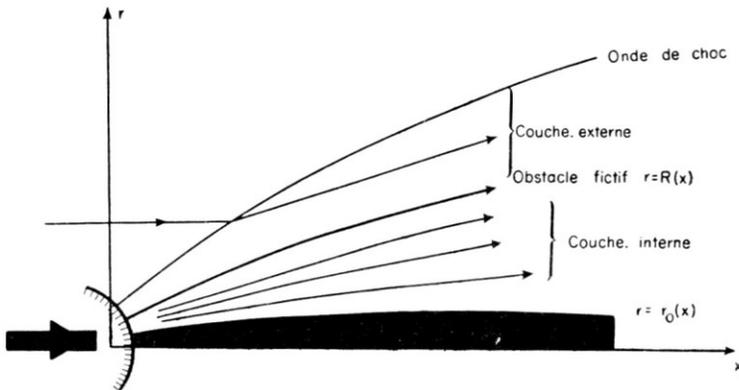


FIG. 2. Structure asymptotique de l'écoulement hypersonique sur un profil à nez émoussé.

Les applications que l'on en peut faire sont très limitées, car aucune solution exacte connue de la théorie des petites perturbations n'est adaptée à (3). Les solutions homogènes conduisent à une valeur de l'exposant égale à $\frac{2}{2+(\nu+1)\bar{\gamma}}$, inférieure à la valeur $\frac{2}{3+\nu}$ qui limite l'existence mathématique des solutions et qui correspond à l'analogie de l'explosion.

Parmi les méthodes approchées l'approximation tangentielle se laisse mettre en oeuvre facilement, mais il est difficile de critiquer les résultats obtenus. L'approximation newtonienne soulève une difficulté, car l'on a la choix entre toute une classe de solutions. Effectivement, la théorie générale qui sera publiée ailleurs montre que des conditions initiales doivent être imposées sur la forme de l'onde de choc. Le comportement de l'onde de choc sur l'obstacle mince émoussé au voisinage du nez doit se

raccorder avec le comportement de l'onde de choc sur le nez loin de ce dernier. En approximation newtonienne on constate ce résultat élegant: il est possible de raccorder, à la manière ci-dessus, l'onde de choc au voisinage du nez d'un obstacle mince éoussé, avec une couche libre de Lighthill-Hayes. En fait, l'intérêt de ce résultat paraît être plus académique que réel; Cheng en a examiné la validité dans un mémoire de Cornell à paraître prochainement et qu'il nous a aimablement communiqué; son analyse confirme le caractère peu réaliste du résultat précédent.

Un résultat positif de la théorie est sans doute l'intervention du paramètre α_v , à côté du paramètre de similitude hypersonique conventionnel $M_\infty \tau$. Mais l'utilisation pratique de ce résultat est délicate car α_v est difficile à calculer avec quelque exactitude.

En résumé, les effets d'éoussements sont très mal connus: la théorie de l'explosion doit sans doute son succès relatif à des circonstances favorables d'ordre empirique. La théorie de remplacement succinctement exposée ici est sans doute théoriquement fondée, mais sa validité exige des nombres de Mach extrêmes, et il paraît difficile de toutes façon d'en tirer des conclusions autres que qualitatives.

REFERENCES

1. BELOTSERKOVSKII, O. M., Ecoulement sur un cylindre circulaire avec choc détaché *Prikl. Matem. Mekhan.* **22**, 206-19, 1958.
2. BLOOM, M. H. et STEIGER, M. H., Inviscid flow with non-equilibrium molecular dissociation for pressure distributions encountered in hypersonic flight. I.A.S 60-26
3. BOISON, J. C. et CURTISS, H. A., An experimental investigation of blunt body stagnation point velocity gradient. *A. R. S. Journal* **29**, 2, 130-35, 1959.
4. BRAY, K. N. C., Atomic recombination in a hypersonic wind-tunnel nozzle *Jour. Fluid Mech.* **6**, 1, 1-32, 1959.
5. BUSEMANN, A., *Flüssigkeits- und Gasbewegung Handwörterbuch der Naturwissenschaften Vol. IV* 2nd edition p. 244-79 Gustav Fischer Jena 1933
6. BYRON, S. R., Measurements of the rate of dissociation of oxygen *Journ. Chem. Phys.* **30**, 6, 1380-92, 1959
7. CHENG, H. K., Hypersonic shock-layer theory of a yawed cone and three-dimensional pointed bodies. Cornell-Aero-Lab. Rep AF 1270-A-1 WADC TN 59-335, 1959
8. CHENG, H. K., Similitude of hypersonic real-gas flows over slender bodies with blunted noses. *J.A.S.* **26**, 9, 575-85
9. CHENG, H. K., HALL, J. G., GOLIAN, F. C. et HERTZBERG, A., Boundary layers displacement and leading edge bluntness effects in high temperature hypersonic flow. I.A.S. 60-38
10. CHERNII, G. G., Ecoulement d'un gaz idéal sur un obstacle à grande vitesse supersonique. *IZV. O.T.N. SSSR.* N° 6, 77-85, 1957
11. CHERNII, G. G., Ecoulement hypersonique sur un profil avec bord d'attaque légèrement éoussé. *Dokl. Akad. Nauk SSR.* **115**, 681-85, 1957

12. CHU, B. T., Wave propagation and the method of characteristics in reacting gas mixtures with applications to hypersonic flow. WADC Techn. Note n° 57-213 Div of Eng Brown University Providence R-I, 1957
13. CHUBB, D. L., Solution to the flow about a two dimensional flat plate at infinite Mach Number *J.A.S.* **27**, 1, 68, 1950
14. DOMMETT, R. I., Thermodynamic properties of air at high temperatures. R-A-E-TN Aero GW 429
15. DORODNITSYNN, A. A., Method of the integral relations for the numerical solution of partial differential equations. Rep. Inst. of Exact Mechanics and Computing techniques Akad. Nauk. SSSR, 1958 (en anglais)
16. EVANS, J. S., Method for calculating effects of dissociation on flow variables in the relaxation zone behind normal shock waves. NACA T.N. 3860
17. EYRING, H., The activated complex in chemical reactions. *Jour. Chem. Phys.* **3**, 2, 107-15, 1935
18. FAY, J. A., RIDDEL, F. R., Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air. *J.A.S.* **25**, 73-85, 1958
19. FELDMAN, S., Hypersonic gas dynamic charts for equilibrium air AVCO Res. Lab. 1957
20. FERRI, A., A review of some recent developments in hypersonic flow. Preprint Premier Congrès International des Sciences Aéronautiques MADRID, 1958
21. FREEMANN, N. C., On the theory of hypersonic flow past plane and axially symmetric bluff bodies. *Jour. Fluid. Mech.* **1**, 4, 366-87, 1956
22. FREEMANN, N. C., Non equilibrium flow of an ideal dissociating gas. *Jour. Fluid. Mech.* **4**, 4, 407-25, 1958
23. FREEMANN, N. C., On the newtonian theory of hypersonic flow for a blunt body NYU rep. 467 Mai 1959
24. FREEMANN, N. C., On a singular point in the newtonian theory of hypersonic flow. *Jour. Fluid. Mech.* **8**, 1, 109-22, 1960
25. GARABEDIAN, P. R., Numerical construction of detached shock waves. *Jour. Math. Phys.* **36**, 3, 192-205, 1957
26. GARABEDIAN, P. R. et LIBERSTEIN, H. M., On the numerical calculation of detached bow shock waves in hypersonic flow. *J.A.S.* **25**, 109-118, 1958
27. GRABAU, M., A method for forming continuous empirical equations for the thermodynamic functions of air from ambient temperatures to 15,000°K with applications. A E D C T.R. 59-102
28. GUIRAUD, J. P., Ecoulements hypersoniques tridimensionnels dans une couche de choc d'épaisseur évanescence. La Recherche Aéronautique n° 73 Juillet-Août 1959-
29. GUIRAUD, J. P., Newtonian flow over a surface, theory and applications. Dans Hypersonic flow, Vol. XI des Colston papers, Butterworth, London, 1960
30. GUIRAUD, J. P., Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur une plaque plane comportant un bord d'attaque d'épaisseur finie. *C. R. Acad. Sci. Paris* **246**, 2842-45, 1958
31. GUIRAUD, J. P., Ecoulement hypersonique d'un fluide parfait sur une aile mince comportant un bord d'attaque émoussé. *C. R. Acad. Sci., Paris* **248**, 3524-26, 1959
32. GUIRAUD, J. P., Ecoulement plan de Couette d'un gaz rayonnant. *C. R. Acad. Sci., Paris* **250**, 2997-99, 1960
33. HANSEN, C. F., Approximations for the thermodynamic and transport properties of high temperature air. NACA T.N. 4150, 1958
34. HAYES, W. D., On hypersonic similitude *Quarterly of Applied Mathematics* **5**, 105-106, 1947

35. HAYES, W. D., 1) Some aspects of hypersonic flow, 2) Hypersonic flow at small density ratios. Ramo-Woolridge-Corp, Los Angeles, 1955
36. HAYES, W. D., Newtonian flow theory. Premier Congrès international des Sciences aéronautiques Madrid, 1958. Aussi Chap. 3 de la référence 37
37. HAYES, W. D. et PROBSTEIN, R. F., *Hypersonic flow theory*. Academic Press New-York, 1959
38. HEIMS, S. P., Effect of oxygen recombination on one-dimensional flow at high Mach numbers. NACA T.N. 4144
39. HEIMS, S. P., Effects of chemical dissociation and molecular vibrations on steady one dimensional flow. NASA T.N. D-87
40. HILSEN RATH, KLEIN and WOOLEY, Tables of thermodynamic properties of air including dissociation and ionization from 1500°K to 15,000°K. A E D C TR 59-20
41. HIRSCHFELDER, J. O., CURTISS, C. F. et BIRD, R. B., *Molecular theory of gases and liquids* Wiley New York, 1954
42. HOLT, M. et GOLD, R., Calculation of hypersonic flow past a flat headed cylinder by Belotserkovskii Method. Div. App. Math. Brown. Univ. Providence R.I. AFOSR TN 59-199 AD 211-525, 1959
43. LAVAL, P., Ecoulements newtoniens sur des surfaces coniques en incidence. *La Recherche Aéronautique* n° 75 Nov. Déc. 1959
44. LEES, L., Recent developments in hypersonic flow. *Jet Propulsion* 27, 11, 1162-77, 1957
45. LEES, L., Laminar heat transfer over blunt nosed bodies at hypersonic flight speeds. *Jet Propulsion* 26, 259-69, 1956
46. LEES, L. et KUBOTA, T., Inviscid hypersonic flow over blunt nosed slender bodies. *J.A.S.* 24, 195-202, 1957
47. LEGENDRE, R., Analogie hydraulique pour l'étude des écoulements hypersoniques. *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences, Paris*, t. 250, p. 3773, 8 juin 1960
48. de L'ESTOILE et ROSENTHAL, Le transfert de chaleur par rayonnement. Rayonnement de la couche de choc et mesure des facteurs d'émission des métaux. A.G.A.R.D. Rep. 211 Oct. 1958
49. LICK, W., Inviscid flow of reacting mixture of gases around a blunt body. *Jour. Fluid. Mech.* 7, 1, 128-44, 1960
50. LIGHTHILL, M. J., Dynamics of a dissociating gas. Part 1: equilibrium theory *Jour. Fluid. Mech.* 2, 1, 1-32, 1957. Part. 2: quasi equilibrium theory *Jour. Fluid Mech.* 8, 2, 161-82, 1960
51. LOGAN, J. G., Relaxation phenomena in hypersonic aerodynamics. I.A.S. 728 Janvier 1957
52. LUNEV, V. V., Motion of a slender blunted body in the atmosphere with high supersonic speeds. Traduction anglaise dans *ARS Journal* 3, 4, 414-15, 1960
53. MANGLER, K. W. et EVANS M. E., The calculation of the inviscid flow between a detached shock wave and a body. R.A.E. Tech. Note Aero. 2536, 1957
54. MANGLER, K. W., The calculation of the flow between a blunt body and the bow wave in Hypersonic flow, Vol. XI des Colston papers. Butterworths London, 1960
55. MATTHEWS, D. L., Interferometric measurements in the shock tube of the dissociation rate of oxygen. *Phys. of Fluids* 2, 2, 170-78
56. MEYEROTT, R. E., Radiation heat transfer to hypersonic vehicles. Preprint 3e reunion AGARD. Combustion et Propulsion Palerme, Mars 1958 Pergamon Press
57. MOORE, F. K. et CHENG, H. K., The hypersonic aerodynamics of slender and filting configuration I.A.S. 59-125

8. MOORE, F. K. et GIBSON, W. E., Propagation of weak disturbances in a gas subject to relaxation effects. *J.A.S.* 59-64
59. PAYNE, L. E., Bounds in the Cauchy problem for the Laplace equation. *Archive for rational Mechanics and Analysis* 5, 1, 35-45, 1960
60. ROSE, P. H., Physical gas dynamics research at the Avco Research Laboratory AGARD 145, Juillet 1957
61. SCALA, S. M. et BAULKNIGHT, C. W., Transport and thermodynamic properties in a hypersonic laminar boundary layer Part. 2 Applications *ARS Journal* 30, 4, 329-36, 1960
62. SERBIN, H., The high speed flow around blunt bodies. *AERO Quarterly*, 9, 313-30, 1958
63. TRAUGOTT, S. C., An approximate solution at the direct supersonic blunt body for arbitrary axisymmetric shapes. *J.A.S.* 27, 5, 361-69, 1960
64. Van DYKE, M. D., The supersonic blunt body problem review and extensions *J.A.S.* 25, 8, 485-96, 1958
65. Van DYKE, M. D., A study of hypersonic small disturbance theory NACA Rep. 1194
66. Van DYKE, M. D. et GORDON, H., Supersonic flow past a family of blunt axisymmetric bodies. NASA Tech. Rep. R-1, 1959
67. VAS, I. E. et BOGDONOFF, S. M., Hypersonic studies of blunt unswept wings. Princeton Univ. Dept. Aero. Eng. Rep. 450
68. WEGENER, P. P., Experiments on the departure from chemical equilibrium in a supersonic flow. *A.R.S. Jour.* 30, 4, 322-29, 1960
69. WHITHAM, G. B., A note on the stand-off distance of the shock in high speed flow past a circular cylinder. *Comm. Pure. App. Math.* 10, 531-25, 1957
70. WIGNER, E., The transition state method *Trans. Farad. Soc.* 34, 29-41, 1938
71. VINCENTI, W. G., Non equilibrium flow over a wavy wale. *Jour. Fluid. Mech.* 6, 4, 481-96, 1959
72. WOOD, G. P., Calculation of the rate of thermal dissociation of air behind shock waves at Mach numbers 10- 12- 14. NACA T.N. 3634
73. ZINMAN, W. G., Recent advances in chemical kinetics and homogeneous reactions in dissociated air *A.R.S. Jour.* 30, 3, 233-37, 1960
74. ZLOTNICK, M. et NEWMAN, D. J., The theoretical calculation of the flow on blunt nosed axisymmetric bodies in a hypersonic stream AVCO Tech. rep. 2-57-29
75. Staff of the computing section center analysis (Under the direction of Z. Kopal). Tables of supersonic flow around Cones. M.T.T. Tech. rep. 1, 1947
76. SITCHEV, V. V., Sur la théorie des écoulements hypersoniques avec onde de choc en puissance. *Prikl. Matem. Mekh.* 24, 3, 5 p. 18-23, 1960
77. GUIRAUD, J. P., Possibilités et limites actuelles de la théorie des écoulements hypersoniques O.N.E.R.A. Publication No 99 (1961)
78. Communication personnelle